щие моделировать топливоподачу и локальные внутрицилиндровые процессы в дизеле с объемным смесеобразованием. Конечные и промежуточные результаты работы программы подтверждены экспериментами. Следовательно, она может быть рекомендована для использования в доводочных работах при создании или модернизации дизелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов В.В. Методы повышения качества смесеобразования и сгорания в судовом дизеле на основе математического и физического моделирования локальных внутрицилиндровых процессов. Автореф. дисс. докт. техн. наук. – СПб.: СПбГМТУ, 2004. – 43 с.

2. Гаврилов В.В., Щукин П.А., Мащенко В.Ю. Некоторые уточнения динамической модели процесса топливоподачи. Межвузовская научно-теоретическая конференция, сборник материалов, выпуск 2. – СПб.: ВМИИ, 2000. – С. 377–378.

3. Щукин П.А. Комплексная математическая модель рабочего процесса дизеля с объемным смесеобразованием. Автореф. дисс. канд. техн. наук. – СПб.: ЦНИДИ, 1999. – 22 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРАВЛИКИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В СИСТЕМАХ ОХЛАЖДЕНИЯ ДВС

Петриченко М.Р.,
СПбГПУ, г.Санкт-Петербург

Экстремальные свойства движений доставляют сильные или достаточные условия, отделяющие действительные движения материальных систем от допустимых (кинематически совместимых, виртуальных).

В гидравлических задачах, в том числе и особенно для расчетов компактных гидравлических линий систем охлаждения ДВС, экстремальные свойства потоков не используются широко. Редкое исключение составляют эвристические условия экстремума, позволяющие замкнуть задачу («принцип» максимума расхода или минимума энергии). Как правило, гидравлические задачи формулируются «феноменологически», с применением общих теорем механики (теоремы об изменении кинетической энергии, количества движения). Такой подход приводит к возникновению интегро-дифференциальных соотношений между гидравлическими элементами или потоками гидромеханических переменных. Эти соотношения трактуются как дифференциальные уравнения.

В настоящей работе обсуждается *одна из возможностей* интерпретации уравнений гидравлики как уравнений Лагранжа для некоторых действий или первообразных (примитивных) функций. Приводится ряд примеров на описание неравномерного движения, медленно меняющегося и резко меняющегося, на которых показывается эквивалентность обеих постановок задач: традиционной, в виде дифференциальных уравнений, и экстремальной. Для резко меняющихся движений (компактные гидролинии систем охлаждения ДВС) вариационная постановка может быть единственно возможной и строгой, поскольку она позволяет рассматривать гидравлические элементы потока не в равномерной, а в слабой топологии. Слабая топология оказывается естественной, например, для описания гидравлических элементов потоков с ограниченной вариацией расхода.

1). Уравнение неравномерного движения в цилиндрическом канале:

$$\frac{dh}{ds}=\frac{i-i_f}{1-Fr},$$

где $0 \le s \le S \le \infty$ – продольная координата, h – пьезометрический напор, i, i_f – уклоны канала и трения, Fr – число Фруда, можно рассматривать как уравнение Лагранжа для функционала:

$$F(h):=\int_0^S\left\{\left(\frac{dh}{ds}\right)^2+\left(\frac{i-i_f}{1-Fr}\right)^2\right\}ds.$$

Минимизация F(h) может проводиться без решения дифференциального уравнения неравномерного движения, на системе альтернирующих функций [1].

2). Пусть t – параметрическая переменная, позволяющая записать уравнение неравномерного движения в виде динамической системы:

$$\frac{dh}{dt}=i-i_f,$$

$$\frac{ds}{dt}=1-Fr.$$

Можно доказать, что эта система уравнений каноническая, т.е. такая, что для нее существует функция Г(s,h), удовлетворяющая системе уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial s}=i_f-i,$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial h}=1-Fr.$$

Тогда простые вычисления показывают, что $\Gamma=H_e+h_f$. Иначе, из каноничности уравнений движения следует существование первого интеграла: $\Gamma=H_e+h_f=const$.

Справедливо обратное (достаточное) условие: если уравнения движения допускают интеграл Г=const, то уравнения движения канонические. Действительно, пусть интеграл Бернулли выполняется. Тогда уравнения движения получаются его дифференцированием вдоль потока: $dH_e+dh_f=0$, $J_e=i_f$, что и требовалось доказать.

Итак, существование интеграла Бернулли для потока «в целом» необходимо и достаточно для каноничности уравнений движения, обладающих таким интегралом.

Функция Г(s, h) трактуется как гамильтониан системы. Двойственная Г функция Λ(s, ds/dt), определяемая как $\Lambda\left(s,\frac{ds}{dt}\right)=\sup\limits_{h}\left(h\frac{ds}{dt}-\Gamma(s,h)\right)$, обладает свойством: $\int \Lambda dt \to \min$. Поэтому возникновение экстремальных признаков поведения у системы дифференциальных неравномерного движения обусловлено существованием интеграла энергии Г=const. Не составляет никакого труда выписать действие $\int \Lambda dt$ и убедиться в том, что система уравнений неравномерного движения необходимо следует из условия $\delta\int \Lambda dt = 0$.

В задачах гидравлики переменного расхода такого интеграла, вообще говоря, нет. Легко доказать, используя уравнение первого начала в форме Эйлера, что:

- для потока с отделением расхода по длине полный напор транзитного потока H_e удовлетворяет интегралу:

$$H_e = H_{e0}\left(\frac{Q_0}{Q}\right)^2 - h_f,\ H_{e0} := H_e(Q_0),\ Q \le Q_0.$$

При постоянном расходе этот интеграл совпадает с интегралом Бернулли;

- для потока с присоединением расхода полный напор транзитного потока исчисляется так:

$$H_e = H_{e0}\frac{Q_0}{Q} + E\left(1-\frac{Q}{Q_0}\right) - h_f + \frac{1}{Q_0}\int\limits_{Q_0}^{Q} h_f dQ,\ Q_0 > 0,$$

$$H_e = E - h_f + \frac{1}{Q}\int\limits_{0}^{Q} h_f dQ,\ Q_0 = 0.$$

Здесь используются стандартные обозначения гидравлических элементов, E – полный напор присоединяемого потока.

Чтобы найти распределение расхода по длине переливного отверстия, написанные соотношения дополняются условием связи (уравнением истечения) в виде:

- для вытяжного узла (присоединение расхода):

$$\frac{dQ}{d\omega} = \mu\sqrt{2g(E - H_e)},\ Q(0) = Q_0;$$

- для приточного узла (отделение расхода):

$$\frac{dQ}{d\omega} = -\mu\sqrt{2gH_e},\ Q(0) = Q_0.$$

Здесь μ - коэффициент расхода переливного отверстия, ω - текущее значение площади переливного отверстия (ω<Ω, Ω - полная площадь переливного отверстия).

Как видно, решение сформулированной задачи Коши не представляет никакого труда при некоторых предположениях о потерях напора h_f. Например, разумно рассматривать квадратичный закон изменения потерь напора в виде $h_f = b(Q - Q_0)^2$, используемый в работе [2]. Тогда можно доказать: в приточном узле соединения потоков и в приточном коллекторе боковая приточность –dQ/dω возрастает по длине щели; в вытяжном отверстии и коллекторе боковая приточность dQ/dω, вообще говоря, не монотонная функция ω<Ω.

3). Уравнение изменения мощности потока на вытяжном тройнике (соединение потоков).

Используется первое начало термодинамики для узла слияния потоков. В случае движения несжимаемой жидкости:

$$d(HQ) = EdQ,$$

где $H := H_e + \frac{e}{g}$ - удельная полная энтальпия транзитного потока, H_e – полный напор транзитного потока, $E := E + \frac{e}{g}$ - удельная полная энтальпия присоединяемой струйки с расходом dQ, e – внутренняя энергия жидкости.

Некоторого пояснения требует термин «удельная величина (напор)». По определению, $H := \dfrac{\int_A \left(h + \frac{u^2}{2}\right) u_n dA}{\int_A \rho g u_n dA}$, т.е. поток полной энтальпии, отнесенный к весовому расходу в данном сечении потока. Поэтому получается, что удельные энтальпии в уравнении первого начала отнесены к разным расходам, поэтому (в отличие от потока с постоянным по длине расходом) напоры не аддитивны и никакого интеграла типа интеграла Бернулли не существует.

Для адиабатного и изотермического смешения струек в узле соединения $de = gdh_f$, dh_f – потеря напора при изменении расхода на dQ. В этом случае уравнение баланса механической энергии принимает вид:

$$d(H_e Q) = EdQ - Qdh_f.$$

При увеличении расхода от значения Q_0 до Q_1 изменение удельной механической мощности транзитного потока изображается интегралом:

$$\Delta N = \Delta(H_e Q) = \int_{Q_0}^{Q_1} EdQ - Qdh_f.$$

Можно доказать, что дифференциальная форма под знаком интеграла – точный дифференциал и интерпретировать эту форму как форму Картана. Важнее следующее предположение. В пределах узла слияния потоков расход монотонно возрастает от значения Q_0. Почти всюду существует производная $q := \frac{dQ}{ds}$ и выражение для изменения удельной мощности транзитного потока можно записать так:

$$\Delta N = \int_0^S \left\{ \left(H_e + H_e'\right) q - Qi_f \right\} ds,$$

$H'_e := E - H_e, H'_e = H'_e(q), H'_e(0) = 0$ - перепад проталкивания, т.е. превышение полного напора (E) присоединяемого потока над полным напором (H_e) транзитного потока, S – продольная протяженность узла слияния. Пусть в действительном движении либо $\Delta N \to \min \geq 0$, либо $\Delta N \to \max \leq 0$. Если это эвристическое предположение справедливо, то уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{dy}{ds} = y_1, \ y = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}, \ y_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial Q},$$

где через $\Lambda(Q, q)$ обозначена плотность лагранжиана: $\Lambda := \frac{d\Delta N}{ds} = \left(H_e + H'_e\right)q - Qi_f$.

Тогда:

$$y = H_e + \frac{d}{dq}\left(qH'_e\right), \ y_1 = q\frac{\partial H_e}{\partial Q} - i_f.$$

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\left(\frac{\partial H_e}{\partial s}\right)_{Q,h} + q\left(\frac{\partial H_e}{\partial Q}\right)_{s,h} + \frac{dh}{ds}\left(\frac{\partial H_e}{\partial h}\right)_{s,Q} + \frac{dq}{ds}\frac{d^2}{dq^2}\left(qH'_e\right) = q\left(\frac{\partial H_e}{\partial Q}\right)_{s,h} - i_f,$$

или, что тоже:

$$\left(\frac{\partial H_e}{\partial s}\right)_{Q,h} + \frac{dh}{ds}\left(\frac{\partial H_e}{\partial h}\right)_{s,Q} = -i_f - \frac{dq}{ds}\frac{d^2}{dq^2}\left(qH'_e\right).$$

Пусть dq/ds=0. Тогда уравнение Лагранжа совпадает с обычным уравнением неравномерного движения. Тогда, в частности, для движения с постоянным по длине расходом (q=0) высказанное эвристическое предположение формулируется так: $-Q\int dh_f \to \max \leq 0$, или $h_f \to \min \geq 0$. Иначе, высказанное эвристическое предположение суть аналог *принципа минимума диссипации* (по крайней мере, для медленно меняющихся движений с постоянным расходом по длине). Таким образом, в равномерном и в медленно изменяющемся движении само собой устанавливается «наилучшее» распределение гидравлических элементов (скорости по сечению потока, глубины по длине потока), доставляющее минимум потерям напора. Далее, если q – постоянное, отделенное от 0, то уравнение неравномерного движения такое же, как и в случае расхода, постоянного по длине.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Р. Петриченко. Среднеквадратичные приближения кривых свободной поверхности в призматическом русле. // В сборнике научных трудов СПбГТУ «Энергетика, гидротехника», №475, СПб, 1998, с.140…144.

2. П.П. Кульмач (ред.). Прикладная специальная гидромеханика, М., Воениздат МО СССР, 1991, 378 с.